Примеры решений многочленов ультрарадикальным методом

Рассмотрим примеры решения уравнений вида

$$x^m = px^n + q$$

Для наглядности будем использовать 2 величины: v_k и u_k

$$x_k = v_k * u_k$$

v_k – это вершина радикального многоугольника, корень одного из коэффициентов q или p, или их дроби $-q/p$

u_k – это ультрарадикал от рокировки, которая содержит v_k, но в другой степени.

v_k можно получить корнем $v = \sqrt[m]{q}$, $v = \sqrt[n]{-\frac{q}{p}}$ или $v = \sqrt[t]{p}$, где $t = m - n$

Получается, что корни трёхчлена можно получать двумя способами:

1. получить сразу все m вершин - корней от $\sqrt[m]{q}$
2. получить n вершин - корней от $\sqrt[n]{-\frac{q}{p}}$ и t вершин - корней от $\sqrt[t]{p}$, $n + t = m$

На момент издания этой статьи известны только степенной ряд ультрарадикала и его граница сходимости. Как ведёт себя ультрарадикал за границей, мы пока не знаем. Поэтому, пока мы можем решать любые трёхчлены только одним из этих способов.

Если $|q^t m^m| > |t^t n^n p^m|$, то решаем первым способом, через корни от $\sqrt[m]{q}$

Если $|q^t m^m| \le |t^t n^n p^m|$, то решаем вторым способом, через корни от $\sqrt[n]{-\frac{q}{p}}$ и от $\sqrt[t]{p}$

Если степени отрицательные или комплексные, то, при сравнении, нужно учитывать их знаки.

$$|q| \ge \left| sgn(m)|s| \left|\frac{pn}{sm}\right|^{\frac{m}{m-n}} - sgn(n)|p| \left|\frac{pn}{sm}\right|^{\frac{n}{m-n}} \right|, \qquad |q| \ge \left| (m-n) e^{\frac{\ln\left((-n)^n \left(\frac{p}{m}\right)^m\right)}{m-n}} \right|$$

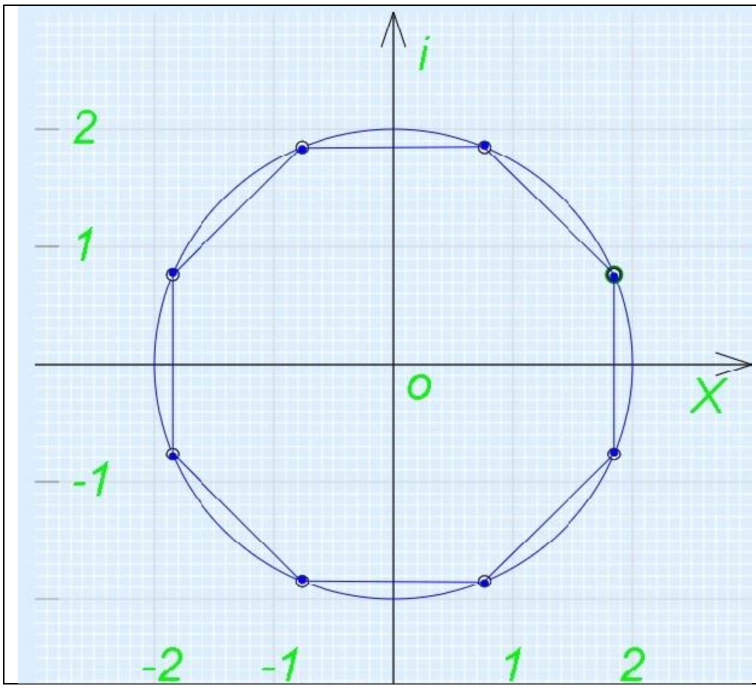
Во всех случаях следует соблюдать, что $|m| > |n|$

Пример 1

$$x^8 = 2x^3 - 256$$

Здесь мы видим, что $\left|256^5 8^8\right| > \left|5^5 3^3 2^8\right|$, значит, воспользуемся первым способом.

$$v_k = \sqrt[m]{q} = \sqrt[8]{-256}$$



В этом радикальном многоугольнике 8 вершин – корней.

$$v = \pm 2 \sqrt{\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

Чтобы по номеру корня понимать, от какой вершины он взят, мы будем использовать нумерацию, согласно формуле Муавра.

$$v_k = \sqrt[8]{256}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{8}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{8}\right)\right)$$

Здесь корень v_0 отмечен увеличенным кружком. Он всегда ближе всех к «началу» этого замкнутого круга. Следующие корни идут против часовой стрелки. Если подкоренное выражение положительное, то нулевой корень всегда вещественный. Если под корнем отрицательное число, и степень нечётная, то вещественный корень всегда средний. Иначе, вещественных корней нет.

Теперь мы можем получить любой корень заданного трёхчлена. Берём любой корень v_k и умножаем его на ультрарадикал от его рокировки.

$$x_k = v_k * u_k$$
$$u_k = brn_B(R)_N$$

Рокировка имеет простейшие правила. Так как корень мы брали только от коэффициента q,то в числитель ставим коэффициент p. Так как корень брали степени m, то и в знаменателе поставим m.

$$R = \frac{p}{mv^t}$$

Например, возьмём нулевой корень.

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$$

$$R = \frac{2}{8 * \left(2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}\right)^5} = -0{,}0029897143153522635 - 0{,}007217808847744428i$$

Теперь нужно получить ультрарадикал от этой рокировки

$$u_k = brn_8(R)_3$$

На сайте http://function-brn.online/ есть кнопка ультрарадикал. Нужно указать значения степеней и рокировки.

$$M = 8$$
$$R = -0{,}0029897143153522635 - 0{,}007217808847744428i$$
$$N = 3$$

И нажать кнопку «=»

Получится $u = 0.997030983780947 - 0.007239778611228485i$

Умножим это значение на тот же корень, который мы использовали в рокировке, получим, решение многочлена

$$x^8 = 2x^3 - 256$$

$$x_k = v_k * u_k = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}} * (0.99703 - 0.00723977861i) = 1{,}847814125 + 0{,}74971711i$$

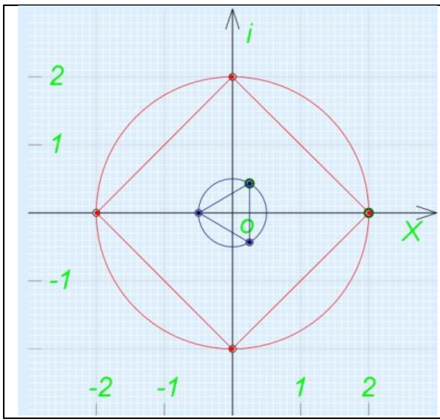
Конечно, на практике лучше пользоваться готовой программой, которая сама будет и рокировку делать и ультрарадикал получать. Но посмотреть на эти шаги нужно, чтобы понимать, какая связь между корнями от одного коэффициента и корнями всего трёхчлена.

Этот же ультрарадикал может давать корни трёхчлена и по другим его коэффициентам.

Пример 2

$$x^7 = 16x^3 + 2$$

Так как $|2^4 7^7| \le |4^4 3^3 16^7|$, воспользуемся вторым способом. Сам ультрарадикал работает с любыми аргументами, но пока мы знаем только его степенной ряд, который имеет ограниченную область сходимости. Поэтому, пока мы должны делать такие проверки, чтобы выбрать способ решения, первый-m или второй-n,t.



Вторым способом n-корней получаются из n-угольника, и ещё t-корней из t-угольника. $v_{nk} = \sqrt[n№k]{-\frac{q}{p}} = \sqrt[3№k]{-\frac{1}{8}}$. У 3-угольника под радикалом отрицательное число, значит, вещественным будет средний корень. Возьмём его. $v_{n1} = -\frac{1}{2}$, посчитаем рокировку $R = \frac{v^t}{np} = \frac{(-0.5)^4}{3*16} = \frac{1}{3*16*16}$

$$u = brn_3\left(\frac{1}{3 * 16 * 16}\right)_7 = 1.00131236916281$$

$$x_{n1} = v_{n1} * u_{n1} = -\frac{1}{2} * 1.00131236916281 = -0.5006561845814$$

У 4-угольника $v_{tk} = \sqrt[t№k]{p} = \sqrt[4№k]{16}$ под радикалом положительное число, значит нулевой корень вещественный. Возьмём его. $v_{t0} = 2$, найдём рокировку $R = \frac{q}{tv^m} = \frac{2}{4*2^7} = \frac{1}{2^8}$

$$u = brn_4\left(\frac{1}{2^8}\right)_{-3} = 1.0038394314588936$$

$$x_{t0} = v_{t0} * u_{t0} = 2 * 1.0038394314588936 = 2.007678862917787$$

Так с помощью радикальных четырёх- и трёх-угольников, ультрарадикальным методом можно получить все 7 корней этого трёхчлена $x^7 = 16x^3 + 2$.